## A noção de consequencia

Já vimos antes, quando da apresentação intuitiva das noções lógicas fundamentais, a consequência lógica pode ser reduzida à validade como um de seus casos particulares, se considerarmos apenas um número finito de asserções. Nesse caso, uma asserção é consequência lógica de uma coleção finita de asserções, se for logicamente válida a asserção condicional cujo antecedente é a conjunção de todos os elementos dessa coleção e o consequente é a asserção em pauta. Considerando a formalização apresentada antes (a LPC), poderíamos caracterizar uma noção finitária de consequência segundo a qual uma fórmula C seria consequência das fórmulas A1,...., An se a fórmula A1∧ ... ∧ An → C for tautologia[[1]](#footnote-1). Todavia, isso não pode ser imediatamente estendido para o caso em que a coleção de asserções é infinita, visto que expressões são sempre finitas. Assim, convém caracterizar a relação de maneira mais geral, de sorte que coleções eventualmente infinitas de fórmulas possam também ser tomadas como antecedentes da relação de consequência (isto é possíveis primeiros termos). Tornar possível tal caracterização é a principal motivação para termos introduzido antes a noção infinitária (porque envolve o domínio infinito das fórmulas) de valorações[[2]](#footnote-2), visto que tal noção torna quase imediata a tarefa de definir consequência, como uma relação necessariamente preservadora da verdade. Assim, dizemos que uma valoração booleana é modelo tautológico de um conjunto de fórmulas se a valoração atribui o valor V a todas as fórmulas do conjunto e dizemos que uma fórmula é consequência tautológica de um conjunto se ela for verdadeira em todos os modelos tautológicos do conjunto. No jargão próprio, temos as seguintes definições.

DEFINIÇÃO ?. 1 Seja Γ {A} um conjunto qualquer de fórmulas.

Uma valoração booleana v é um **modelo tautológico** de Γ (em símbolos, v ╞ Γ) se para qualquer fórmula C em Γ, v(C) =V;

A é **consequência tautológica** de Γ (em símbolos, Γ ╞ A) se v(A) =V , para qualquer modelo tautológico v de Γ

Evidentemente, ficamos curiosos em saber quanto da noção finitária de consequência é preservado nessa definição generalizada. Vejamos, então, algumas proposições que expressam isso. Em primeiro lugar, ela preserva as relações de significação com os demais conceitos lógicos assinalados anteriormente, em especial, uma fórmula é tautologia se e apenas se for consequência tautológica do conjunto vazio e uma fórmula é inconsistente se e apenas se for consequência tautológica de qualquer conjunto (a demonstração disso fica a cargo do leitor). A primeira das relações de significação entre tautologia e consequência tautológica justifica o emprego de um mesmo símbolo (qual seja, ╞ ) com dois fins distintos: (i) como prefixo ao qual se segue a indicação de uma fórmula para indicar que se trata de uma tautologia ou (ii) precedido da indicação de um conjunto de fórmulas e sucedido pela indicação de uma fórmula para indicar que essa é consequência tautológica daquele conjunto.

Também não é difícil perceber que a relação de consequência ora definida satisfaz a certas propriedades gerais, quais sejam:

1. (“Reflexividade”) Se A∈Γ, então Γ ╞ A
2. (“Monotonicidade”) Se Γ╞ A, então Γ Δ╞ A
3. (“Transitividade”) Se Γ╞ A e Δ ∪{A}╞ C, então Γ∪ Δ ╞ C

Pois, quanto ao primeiro item, todo modelo tautológico de Γ verificará, em particular, a fórmula A, supondo que A esteja em Γ. Raciocínios análogos permitem demonstrar os demais itens (e é um bom exercício para o leitor tentar descrevê-los o mais precisamente que for capaz). Também é possível mostrar uma interessante relação de significação entre o conceito generalizado e a noção finitária de consequência, a saber, que uma formula qualquer é consequência de um conjunto qualquer (finito ou não) se e apenas se for consequência de um subconjunto finito desse conjunto. Em outros termos, é possível mostrar a proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO ?. 1 Seja Γ uma conjunto qualquer de fórmulas e seja A uma fórmula qualquer. Γ ╞ A se e apenas se existem fórmulas A1,...., An em Γ tais que ╞ A1∧ ... ∧ An → A.

Um lado, da direita para a esquerda é trivial (pois se existirem fórmulas A1,...., An em Γ tais que ╞ A1∧ ... ∧ An → A, então todo modelo de Γ verificara cada uma das fórmulas A1,...., An e, assim, verificará também A). Por outro lado, evidentemente, se Γ for um conjunto finito é suficiente considerar A1,...., An como a listagem de todos os seus elementos e mostrar que { A1,...., An}╞ A se e apenas se ╞ A1∧ ... ∧ An → A (Exercício). A dificuldade maior surge no caso em que Γ é infinito. Nesse caso, o resultado não é previsível, já porque não temos como saber de quais dentre as infinitas fórmulas em Γ A seria consequência. Mas o resultado desejado decorre de um outro resultado, segundo o qual um conjunto tem modelo proposicional se e apenas se todo subconjunto finito dele tiver. Pois, supondo esse outro resultado, podemos raciocinar por contraposição, supondo que não existam fórmulas A1,...., An em Γ tais que ╞ A1∧ ... ∧ An → A. Assim, para quaisquer fórmulas A1,...., An em Γ, o conjunto {A1,...., An}∪{¬A} tem modelo proposicional (decorrência imediata do fato de A1∧...∧ An → A não ser tautologia). Vale dizer, todo subconjunto finito de Γ {¬A} tem modelo proposicional, e portanto, pelo resultado suposto, Γ {¬A} tem modelo proposicional; consequentemente, A não é consequência tautológica de Γ (QED). Enunciemos e demonstremos o resultado auxiliar.

PROPOSIÇÂO ? .2 Um conjunto qualquer de fórmulas tem modelo proposicional se e apenas se todo subconjunto finito dele tiver.

Demonstração[[3]](#footnote-3). Da esquerda para a direita é trivial (pois um modelo do conjunto como um todo é modelo de cada um de seus subconjuntos). Por outro lado, seja Γ um conjunto de fórmulas tal que todo subconjunto finito dele tem modelo proposicional.

Caracterizamos, inicialmente uma família infinita de conjuntos de letras sentenciais (Δn)n∈ω, por meio das seguintes cláusulas:

Δ0 é o conjunto vazio

Para definir Δn+1 consideremos duas possibilidades, mutuamente excludentes e, em conjunto, exaustivas:

1. Para todo subconjunto finito Δ de Γ, o conjunto Δ Δn {P} (sendo P a n-ésima letra sentencial) da linguagem é tautologicamente consistente. Nesse caso, definimos Δn+1 como Δn {P}
2. Para algum subconjunto finito Δ de Γ, o conjunto Δ Δn {P} (sendo p a n-ésima letra sentencial) da linguagem não é tautologicamente consistente. Nesse caso, definimos Δn+1 como Δn {¬P}

Tomemos, então, Δ como a união de todos os Δ, ou seja, Δ = . E consideremos a valoração booleana que atribui o valor V a uma letra sentencial se tal letra pertence a Δ e atribui o valor F se a negação dela pertencer Δ. Os lemas a seguir cuja demonstração será deixada a cargo do leitor, asseguram que existe uma tal valoração booleana.

Leminha ?.1.1 Para qualquer n ≥ 0, e qualquer subconjunto finito Λ de Γ, Λ Δn é tautologicamente consistente.

Leminha ?.1.1 Para qualquer letra sentencial P, temos que: (i) ou bem P ∈Δ ou bem ¬P∈Δ (mas não ambos) e se n é o índice da letra sentencial P, então (ii) P ∈Δ se e apenas se P ∈ Δn, e (iii) ¬P ∈Δ se e apenas se ¬P ∈ Δn.

Na verdade esses pequenos lemas demonstram não apenas a existência, mas a unicidade da valoração (visto que valorações booleanas são univocamente determinadas pelos valores atribuídos às letras sentencias). E essa valoração, chamemo-la de v, verifica todas as fórmulas em Γ. Pois, seja A uma fórmula qualquer em Γ e seja k o maior índice dentre os índices das letras sentenciais que ocorrem em A; assim, para qualquer letra sentencial P que ocorre em A, ou bem P ocorre em Δk ou bem ¬P ocorre Δk (isso decorre dos itens (ii) e (iii) do segundo lema, levando em conta que, pela construção acima, para qualquer ≤ k, Δiestá contido em Δk). Pelo primeiro dos dois lemas, temos que existe uma valoração booleana v’ que verifica A, bem como todas as fórmulas em Δk e, portanto, atribuí às letras sentenciais que ocorrem A o mesmo valor que v atribui; consequentemente, v também verifica A (pois, o valor que uma valoração booleana da a uma fórmula é univocamente determinado pelo valor que ela atribui as letras sentenciais ocorrendo nela). (QED)

## Exercícios

1. Para qualquer fórmula A e qualquer conjunto Γ de fórmulas, Γ ╞ A se e apenas se Γ {¬A}
2. Mostre que para quaisquer fórmulas A1,...., An e A, { A1,...., An}╞ A se e apenas se ╞ A1∧ ... ∧ An → A
3. Mostre que Ø ╞ A se e apenas se A for uma tautologia
4. Dizemos que um conjunto é tautologicamente trivial se qualquer fórmula for consequência tautológica dele Mostre que um conjunto é trivial se e apenas se o absurdo for consequência tautológica dele.

1. Ou, o que é equivalente, se A1 → (... (An → C)...) for tautologia, as duas fórmulas são logicamente equivalentes. [↑](#footnote-ref-1)
2. O leitor perspicaz deve já ter percebido que, se fosse para dar conta apenas da noção de validade proposicional (tautologia), bastaria considerar, para cada fórmula, atribuições de valores de verdade às letras sentenciais (em número finito) que ocorrem nela e, assim, operar apenas com as entidades finitas que são as tabelas de verdade. [↑](#footnote-ref-2)
3. A idéia dessa demonstração é tomada de (ANDREWS, 1986). [↑](#footnote-ref-3)